（在此卷上答题无效）

2025-2026学年福州市高三年级第一次质量检测

数学试题

（完卷时间：120分钟；满分：150分）

友情提示:请将所有答案填写到答题卡上！请不要错位、越界答题！

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集$U=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-1\leqslant 0\}$，集合$A=\{0,1\}$，则$\complement_U A$中元素个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 已知$\mathrm{i}z=2-\mathrm{i}$，则$|z|=$

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

3. 一物体在力$\boldsymbol{F}$的作用下，由点$A(5,0)$移动到点$B(2,4)$．若$\boldsymbol{F}=(-2,3)$，则$\boldsymbol{F}$对该物体所做的功为

A. -18　　B. -2　　C. 2　　D. 18

4. 若函数$f(x)=\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图象与直线$y=a$的相邻两个交点的距离为$\frac{\pi}{4}$，则$\omega=$

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

5. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，直线$y=3$与l交于点M．若$|MF|=5$，则$p=$

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{2\pi x}{3}, & x<0,\\ f(x-4), & x\geqslant 0,\end{cases}$则$f(2\,025)=$

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

7. 在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1$，则直线AB_1与平面BCC_1B_1所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

8. 已知实数x,y满足$x^2+2\log_4 x=y+4\log_2 y$，则$x,y$的大小关系不可能是

A. $y<x<1$　　B. $x<y<1$　　C. $1<x<y$　　D. $1<y<x$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. $\left(\frac{2}{x}-x\right)^n$的展开式中，各二项式系数的和为256，则

A. $n=8$　　B. 展开式中各项系数的和为3^8

C. 展开式中存在常数项　　D. 展开式中x^6的系数为16

10. 已知双曲线$\Gamma: x^2-\frac{y^2}{2}=1$的左、右顶点分别为$A,B$，$M$是$\Gamma$上异于$A,B$的一个动点，记直线$AM,BM$的斜率分别为$k_1,k_2$，则下列说法正确的是

A. Γ的离心率为$\sqrt{3}$　　B. $k_1k_2=-2$

C. 当$k_1=1$时，$\tan\angle AMB=\frac{1}{3}$　　D. 直线$\sqrt{2}x+y-1=0$与Γ恰有一个公共点

11. 在$\triangle ABC$中，$AB=2,AC=3,A=\frac{\pi}{3}$，点$P$为$\triangle ABC$内一点，$AP$的延长线交$BC$于点$D$，则下列说法正确的是

A. 若P为$\triangle ABC$的重心，则$AP=\sqrt{2}$　　B. 若P为$\triangle ABC$的外心，则$AP=\frac{\sqrt{21}}{3}$

C. 若P为$\triangle ABC$的垂心，则$AD=\frac{3\sqrt{21}}{7}$　　D. 若P为$\triangle ABC$的内心，则$AD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 已知曲线$y=ax-\frac{1}{x}-a$在$x=1$处的切线斜率为3，则实数$a=$______.

13. 已知两直线$y=x$与$y=x+2$被圆M所截得的弦长相等，则圆M的圆心可以是________，半径可以是________.（写出一组满足条件的结果即可）

14. 已知圆台的上、下底面半径之比为$3:4$，母线长为$\sqrt{2}$，该圆台的上、下底面圆周都在球O的球面上，球O的表面积为100π，则该圆台的体积为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=2,S_6=S_5+7$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=2^{a_n}$，求数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和T_n.

16. （15 分）

记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sqrt{3}a\sin C=c(1+\cos A)$.

（1）求A；

（2）若$a=2$，$\triangle ABC$的周长为6，求$\triangle ABC$的面积.

17. （15 分）

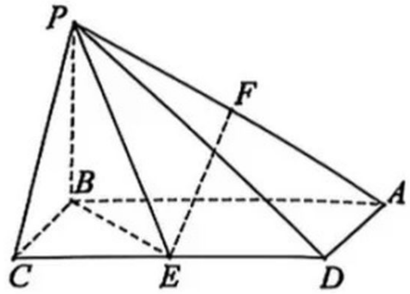
如图，四棱锥$P-ABCD$的底面为矩形，$PB\perp$平面$ABCD$，$AB=2BC$，点E,F分别为棱CD,PA的中点.

（1）证明：平面$PEF\perp$平面PBE；

（2）点H为线段AD上的点，且满足$PE//$平面BFH.

（i）确定点H在AD上的位置；

（ii）若$PB=2\sqrt{3},BC=3$，求直线PC与直线FH所成角的余弦值.



18. （17分）

已知函数 $f(x)=(x^2-a)\ln|x|$.

（1）证明：曲线 $y=f(x)$ 是轴对称图形；

（2）若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；

（3）若 $f(x)$ 恰有 4 个极值点，求 a 的取值范围.

19. （17分）

在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-4,0)$，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长等于 $|OA|$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（1）求 E 的方程；

（2）设直线 $l:y=-\dfrac{1}{2}x+4$，B 为椭圆 E 短轴上的动点（不落在短轴的两端点），过 B 作 y 轴的垂线交 E 于 P,Q 两点．直线 AP 与 E 的另一个交点为 C，且与 l 交于点 M；直线 AQ 与 E 的另一个交点为 D，且与 l 交于点 N.

（i）试探究直线 CD 是否经过一个定点？若是，求出该定点坐标；若不是，请说明理由；

（ii）当 B 位于 x 轴上方时，求 $\dfrac{|PQ|}{|MN|}$ 的取值范围.

2025—2026 学年第一学期福州市高三年级 8 月份质量检测

数 学 参 考 答 案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B　2. B　3. D　4. C　5. C　6. D　7. A　8. A

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. AC　10. ACD　11. BCD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 2

13. $(0,1)$，1（答案不唯一，写出圆心在直线 $y=x+1$ 上，半径大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 都对）.

14. $\frac{37\pi}{3}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.【考查意图】本小题主要考查等差数列的通项公式与前 n 项和公式、分组求和等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、特殊与一般思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性．满分 13 分．

【解析】

（1）因为 $S_6=S_5+7$，

所以 $a_6=S_6-S_5=7$， ……………………………………………………… 2 分

故 $\{a_n\}$ 的公差 $d=\frac{a_6-a_1}{6-1}=\frac{7-2}{6-1}=1$， …………………………………………… 4 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2+(n-1)\times 1=n+1$． ……………………………… 6 分

（2）由（1）及题设得 $b_n=2^{a_n}=2^{n+1}$， ………………………………………………… 7 分

所以 $b_1=2^2=4$， $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}=2$，

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 4，公比为 2 的等比数列．

$T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$ ………………………………………………8 分

$=\frac{(2+n+1)n}{2}+\frac{4(1-2^n)}{1-2}$

$=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+2^{n+2}-4$. ……………………………………………………………… 13 分

16.【考查意图】本小题主要考查用正弦定理、余弦定理解三角形以及任意三角形的面积公式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想等，考查逻辑推理和数学运算等核心素养，体现基础性．满分 15 分．

【解析】（方法一）

（1）由 $\sqrt{3}a\sin C=c(1+\cos A)$ 及正弦定理，

得 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C(1+\cos A)$. ……………………………………………… 2 分

又 $\sin C\neq 0$，得 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，……………………………………… 3 分

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 7 分

（2）由（1）得 $A=\frac{\pi}{3}$.

由 $a=2$，$\triangle ABC$ 的周长为 6，得 $b+c=4$. ………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，…………………………………………… 10 分

所以 $b^2+c^2-4=bc$，即 $(b+c)^2-4=3bc$，

故 $bc=4$，……………………………………………………………………………… 13 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. ……………………………………… 15 分

（方法二）由 $\sqrt{3}a\sin C=c(1+\cos A)$ 及正弦定理，

得 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C(1+\cos A)$. ……………………………………………… 2 分

又 $\sin C\neq 0$，得 $\sqrt{3}\sin A=1+\cos A$，………………………………………… 3 分

即 $2\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}$，……………………………………………………… 5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\cos\frac{A}{2}\neq 0$，

所以 $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$． …………………………………… 7 分

（2）同方法一，略． ………………………………………………………………………15 分

17.【考查意图】本小题主要考查平面与平面垂直的判定、直线与平面平行的性质、异面直线所成角、空间向量等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力等，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 15 分．

【解析】（方法一）

（1）证明：连接 AE，如图所示．

因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，$AB=2BC$，点 E 为棱 CD 的中点，

所以 $BC=CE$，且 $\angle BCE=90°$，所以 $\angle BEC=45°$． ………………………………… 1 分

同理 $\angle DEA=45°$，

所以 $\angle AEB=180°-2\times45°=90°$，即 $AE\perp EB$． ……………………………………… 2 分

因为 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，$AE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AE\perp PB$． ……………………… 3 分

又因为 $EB\cap PB=B$，所以 $AE\perp$ 平面 PBE． ……………………………………………… 4 分

因为 $AE\subset$ 平面 PAE，所以平面 $PAE\perp$ 平面 PBE，

即平面 $PEF\perp$ 平面 PBE． ………………………………………………………………… 5 分

（2）（i）如图，连接 BH 交 AE 于点 G．

因为 $PE//$ 平面 BFH，$PE\subset$ 平面 PAE，平面 $PAE\cap$ 平面 $BFH=FG$，

所以 $PE//FG$， ……………………………………………………………………………… 6 分

因为点 F 为棱 PA 的中点，所以点 G 为 AE 的中点． ………………………………… 7 分

设 K 为 AB 的中点，连接 EK 交 BH 于点 N．

又因为点 E 为 CD 的中点，四边形 $ABCD$ 为矩形，

所以 $EK//AD$，且 $EK=AD$， ……………………………………………………………… 8 分

所以 $\triangle NEG\cong\triangle HAG$，所以 $NE=HA$，故 $HD=KN=\frac{1}{2}AH$，所以 $\frac{AH}{HD}=2$，

即点 H 为 AD 的一个三等分点，靠近点 D 的位置． …………………………………10 分

（ii）因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，且 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，

所以以点 B 为原点，分别以 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$， ……………………………………………………………11 分

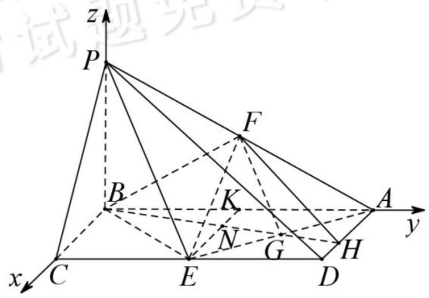
因为 $PB=2\sqrt{3},BC=3,AB=2BC$，所以 $P\left(0,0,2\sqrt{3}\right),C\left(3,0,0\right),F\left(0,3,\sqrt{3}\right)$，

由（i）知，$AH=2HD$，故 $AH=2,H(2,6,0)$，…………………………………12 分

所以 $\overrightarrow{PC}=(3,0,-2\sqrt{3}),\overrightarrow{FH}=(2,3,-\sqrt{3})$，…………………………………13 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{FH}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{FH}}{|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{FH}|}=\dfrac{6+6}{\sqrt{21}\times 4}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，…………………………………14 分

所以直线 PC 与直线 FH 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. …………………………………15 分



（方法二）因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，且 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，

故以点 B 为原点，分别以 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$，…………………………………1 分

（1）证明：设 $PB=h,BC=t$，因为 $AB=2BC$，则 $P(0,0,h),E(t,t,0),F\left(0,t,\dfrac{h}{2}\right),B(0,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{PE}=(t,t,-h),\overrightarrow{PF}=\left(0,t,-\dfrac{h}{2}\right),\overrightarrow{PB}=(0,0,-h)$.

设平面 PEF 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PF}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}tx_1+ty_1-hz_1=0,\\ ty_1-\dfrac{h}{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=2t$，得 $\vec{m}=(h,h,2t)$；……………2 分

设平面 PBE 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}tx_2+ty_2-hz_2=0,\\ -hz_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，得 $\vec{n}=(1,-1,0)$；……………4 分

所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=h\times1+h\times(-1)+2t\times0=0$，所以 $\vec{m}\perp\vec{n}$，

所以平面 $PEF\perp$ 平面 PBE；…………………………………6 分

（2）（i）由（1）知，$\overrightarrow{PE}=(t,t,-h)$，

因为点 H 为线段 AD 上的点，设 $AH=r\ (0\leqslant r\leqslant t)$，则 $H(r,2t,0)$，……………7 分

所以 $\overrightarrow{BF}=\left(0,t,\dfrac{h}{2}\right),\overrightarrow{BH}=(r,2t,0)$，

设平面 BFH 的法向量为 $\vec{u}=\left(x_3, y_3, z_3\right)$，

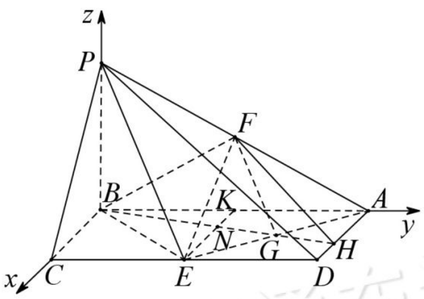
则 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{BH}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}ty_3+\dfrac{h}{2}z_3=0,\\ rx_3+2ty_3=0,\end{cases}$ 令 $x_3=2t$，得 $\vec{u}=\left(2t,-r,\dfrac{2rt}{h}\right)$； ………… 9 分

因为 $PE//$ 平面 BFH，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\vec{u}=0$，所以 $2t\times t+(-r)\times t+\dfrac{2rt}{h}\times(-h)=0$，

解得 $r=\dfrac{2}{3}t$， …………………………………………………………………… 10 分

所以 $\dfrac{AH}{HD}=2$，即点 H 为 AD 的一个三等分点，靠近点 D 的位置．…………… 11 分

（ii）略，同方法一．……………………………………………………………………… 15 分



（方法三）(1) 略，同方法一．………………………………………………………… 5 分

(2)（i）由 $PE//$ 平面 BFH 可知，H 唯一确定．

如图，取 AE 中点 G，连接 FG, BG，BG 的延长线交 AD 于点 H，

则 H 即为所求．………………………………………………………………………… 6 分

理由如下：

因为 F, G 分别为 AP, AE 中点，所以 $FG//PE$， ……………………………… 7 分

因为 $FG\subset$ 平面 BFH，$PE\not\subset$ 平面 BFH，

所以 $PE//$ 平面 BFH．…………………………………………………………………… 8 分

设 $\dot{AD}=\lambda\dot{AH}\left(\lambda\geqslant 1\right)$，由 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 得 $2\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AH}$，

因为 G, B, H 三点共线，所以 $2=\dfrac{1}{2}+\lambda$，解得 $\lambda=\dfrac{3}{2}$， ……………………… 9 分

所以 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，点 H 为 AD 的一个三等分点，靠近点 D 位置．………… 10 分

（ii）在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中，$PC=\sqrt{PB^2+BC^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{21}$，

连接 AC，取 AC 中点 O，连接 OF，

因为点 F 为 PA 中点，所以 $OF=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，$OF//PC$．

所以 $\angle OFH$ 为直线 PC 与直线 FH 所成角或其补角. ……………………………12 分

取 AB 中点 M，连接 FM,MH，则 $FM=\frac{1}{2}PB=\sqrt{3}$，$FM\,//\,PB$，

因为 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $FM\perp$ 平面 $ABCD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHM$ 中，$AM=\frac{1}{2}AB=3$，$AH=\frac{2}{3}AD=2$，

所以 $MH=\sqrt{AM^2+AH^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FMH$ 中，$FH=\sqrt{FM^2+MH^2}=\sqrt{3+13}=4$.

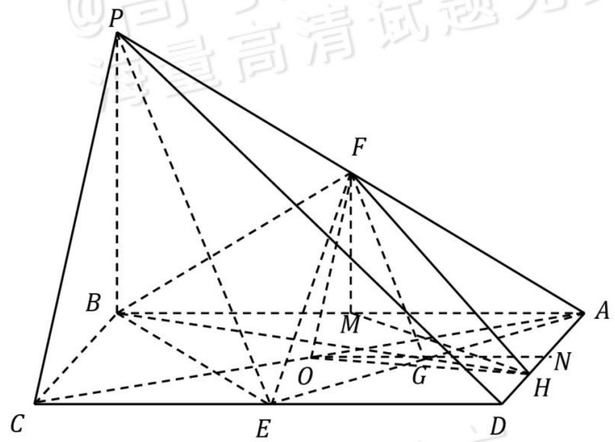
取 AD 中点 N，连接 ON，则 $ON\perp AD$，

所以 $OH=\sqrt{ON^2+HN^2}=\sqrt{3^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$. ……………………………14 分

在 $\triangle OFH$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle OFH=\frac{OF^2+FH^2-OH^2}{2OF\cdot FH}=\frac{\frac{21}{4}+16-\frac{37}{4}}{2\times\frac{\sqrt{21}}{2}\times 4}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

所以直线 PC 与直线 FH 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………15 分



18.【考查意图】本小题主要考查函数的图象与性质、不等式恒成立以及函数的极值等基础知识，考查逻辑推理能力、直观想象能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想和数形结合思想等，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性. 满分 17 分.

【解析】(方法一)

(1) 证明：$f(x)$ 的定义域 $D=\{x\mid x\neq 0\}$. ……………………………1 分

对任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$，且 $f(-x)=\left[(-x)^2-a\right]\ln|-x|=(x^2-a)\ln|x|=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数， ………………………………………………………………………… 2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 是轴对称图形，对称轴为 y 轴． ……………………………… 3 分

（2）由（1）可知，只需考虑 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 0$． ……………………………… 4 分

当 $x>1$ 时，$\ln x>0$，故 $f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2-a\geqslant 0$，所以 $a\leqslant 1$．

当 $x=1$ 时，$\ln x=0$，此时 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $a\in \mathbf{R}$．

当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，故 $f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2-a\leqslant 0$，所以 $a\geqslant 1$． ……………… 7 分

综上，$a=1$． …………………………………………………………………………… 8 分

（3）由（1）可知，$f(x)$ 恰有 4 个极值点等价于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个极值点． · 9 分

下面只考虑 $x>0$ 的情形．

$f(x)=(x^2-a)\ln x$，

$f'(x)=2x\ln x+(x^2-a)\dfrac{1}{x}=2x\left(\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2x^2}\right)$， ………………………… 10 分

设 $\varphi(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2x^2}(x>0)$，$f'(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的零点相同．

当 $a\geqslant 0$ 时，$\varphi(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 至多有一个零点，

则 $f(x)$ 至多 1 个极值点，不符合题意． ……………………………………………… 11 分

当 $a<0$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^3}=\dfrac{x^2+a}{x^3}$，

当 $0<x<\sqrt{-a}$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x>\sqrt{-a}$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(\sqrt{-a})=\ln\sqrt{-a}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\ln\sqrt{-a}+1$． ………………… 13 分

因为 $f(x)$ 有两个极值点，所以 $\varphi(x)$ 有两个零点，则 $\varphi(x)_{\min}<0$，即 $\ln\sqrt{-a}+1<0$，

解得 $-\dfrac{1}{e^2}<a<0$． ……………………………………………………………… 14 分

下面证明：当 $-\dfrac{1}{e^2}<a<0$ 时，$f(x)$ 有两个极值点．

因为 $\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2-(-a)=\dfrac{a}{4}(a+4)<0$，即 $0<-\dfrac{a}{2}<\sqrt{-a}<1$，

令 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$，即 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$，…………………………………………………………15 分

所以 $\varphi\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{a}>1+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{2}>0$.

又因为 $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2}>0$，

结合零点存在性定理可知，

当 $-\dfrac{1}{e^2}<a<0$ 时，$\varphi(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-a}\right)$，$\left(\sqrt{-a},+\infty\right)$ 上各有一个零点，记为 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，

当 $0<x<x_1$ 时，$\varphi(x)>0,f'(x)>0$；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$\varphi(x)<0,f'(x)<0$；

当 $x>x_2$ 时，$\varphi(x)>0,f'(x)>0$，

故 x_1 为 $f(x)$ 的极大值点，x_2 为 $f(x)$ 的极小值点，满足题意.

综上，a 的取值范围为 $\left(-\dfrac{1}{e^2},0\right)$. …………………………………………………………17 分

（方法二）（1）略，同方法一. ……………………………………………………………………3 分

（2）由（1）可知，只需考虑 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 0$. …………………………………………4 分

因为 $u(x)=x^2-a$ 与 $v(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上都单调递增，

所以 $f(x)\geqslant 0$ 等价于 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的零点相同. ………………………………………6 分

所以 $\begin{cases}u(x)=0,\\v(x)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-a=0,\\\ln x=0,\end{cases}$ ……………………………………………………7 分

解得 $a=1$. ……………………………………………………………………………………8 分

（3）由（1）可知，$f(x)$ 恰有 4 个极值点等价于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个极值点. ·9 分

下面只考虑 $x>0$ 的情形.

$f(x)=\left(x^2-a\right)\ln x$，

$f'(x)=2x\ln x+\left(x^2-a\right)\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2\ln x+x^2-a}{x}$，…………………………………………10 分

设 $g(x)=2x^2\ln x+x^2-a(x>0)$，$f'(x)$ 与 $g(x)$ 的零点相同.

$g'(x)=4x\ln x+2x^2\cdot\dfrac{1}{x}+2x=4x\ln x+4x=4x(\ln x+1)$，…………………………11 分

令 $g'(x)=0$ 得，$x=\dfrac{1}{e}$，

当$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

故$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}-a$．……………………………………………………13 分

因为当$x>0$且$x\to 0$时，$g(x)\to -a$；当$x\to +\infty$时，$g(x)\to +\infty$，……………14 分

当$a\geqslant 0$时，$-a\leqslant 0$，$g(x)$只有一个零点，不符合题意；

所以$a<0$．………………………………………………………………………………15 分

因为$f(x)$恰有两个极值点，所以$g(x)$恰有两个零点，

则$g(x)_{\min}=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}-a<0$，解得$-\frac{1}{\mathrm{e}^2}<a<0$．

综上，a的取值范围为$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^2},0\right)$．…………………………………………………17 分

19.【考查意图】本小题主要考查圆锥曲线的方程、图象与性质、直线与圆锥曲线的位置关系等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、特殊与一般思想和数形结合思想等，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分．

【解析】

（1）依题意得$\begin{cases}2a=|OA|=4,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ……………………………………………………2 分

解得$a=2,b=\sqrt{3},c=1$，……………………………………………………3 分

所以E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．……………………………………………4 分

（2）（ⅰ）直线CD过定点$T\left(-\frac{5}{2},0\right)$．……………………………………………5 分

理由如下：

设$C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),P(s,t)$，则$Q(-s,t)$，且$3s^2+4t^2=12$．…………………6 分

直线AP的方程为$y=\frac{t}{s+4}(x+4)$，

由$\begin{cases}y=\frac{t}{s+4}(x+4),\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$得$(2s+5)x^2+(8-2s^2)x-s(5s+8)=0$，

由韦达定理得$s\cdot x_1=-\frac{s(5s+8)}{2s+5}$，故$x_1=-\frac{5s+8}{2s+5}$．…………………………8 分

同理可得$x_2=-\dfrac{-5s+8}{-2s+5}=\dfrac{-5s+8}{2s-5}$． ……………………………………………………… 9 分

所以$\overrightarrow{TC}=\left(x_1+\dfrac{5}{2},y_1\right),\overrightarrow{TD}=\left(x_2+\dfrac{5}{2},y_2\right)$，

所以$\left(x_1+\dfrac{5}{2}\right)y_2-\left(x_2+\dfrac{5}{2}\right)y_1=\left(x_1+\dfrac{5}{2}\right)\dfrac{t}{-s+4}(x_2+4)-\left(x_2+\dfrac{5}{2}\right)\dfrac{t}{s+4}(x_1+4)$

$=\dfrac{9}{2(2s+5)}\cdot\dfrac{t}{-s+4}\cdot\dfrac{3(s-4)}{2s-5}+\dfrac{9}{2(2s-5)}\cdot\dfrac{t}{s+4}\cdot\dfrac{3(s+4)}{2s+5}$

$=\dfrac{-27t}{2(2s+5)(2s-5)}+\dfrac{27t}{2(2s+5)(2s-5)}$

$=0$，

所以$\overrightarrow{TC}//\overrightarrow{TD}$．

又因为直线TC,TD有公共点T，所以C,D,T三点共线，即直线CD过定点T． 11 分

（ii）由$\begin{cases}y=\dfrac{t}{s+4}(x+4),\\ y=-\dfrac{1}{2}x+4\end{cases}$ 得$x_M=\dfrac{8(s-t+4)}{s+2t+4}$， ……………………………… 12 分

同理可得$x_N=\dfrac{8(-s-t+4)}{-s+2t+4}$，

因此$|MN|=\sqrt{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}\,|x_M-x_N|=\left|\dfrac{24\sqrt{5}st}{(2t+4)^2-s^2}\right|$． …………………………… 14 分

依题意，$0<t<\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{|PQ|}{|MN|}=\dfrac{\left|4t^2+16t+16-4\left(1-\dfrac{t^2}{3}\right)\right|}{12\sqrt{5}|t|}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\times\left(\dfrac{4}{3}t+\dfrac{3}{t}+4\right)$

$\geqslant\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\times\left(2\sqrt{\dfrac{4}{3}t\cdot\dfrac{3}{t}}+4\right)=\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$，

当且仅当$\dfrac{4}{3}t=\dfrac{3}{t}$，即$t=\dfrac{3}{2}$时等号成立，…………………………………………… 16 分

所以$\dfrac{|PQ|}{|MN|}$的取值范围为$\left[\dfrac{8\sqrt{5}}{15},+\infty\right)$．……………………………………………… 17 分